Si tenemos en cuenta la ecuación diferencial $y_p'' - 2y_p' + 5y_p = -20e^x \operatorname{sen} 2x$, entonces:

$$(-4B)e^x \operatorname{sen} 2x + (4A)e^x \cos 2x = -20e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Que se cumple cuando

$$\begin{cases} -4B = -20 \\ 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 5; \\ A = 0. \end{cases}$$

Hallamos que la solución particular es $y_p(x) = 5xe^x \cos 2x$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 5xe^x \cos 2x + e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$$

□

Principio de superposición

Muchas ED son, por ejemplo:

$$L[y] = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x), \tag{4.20}$$

donde

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

y donde $g_1(x)$, $g_2(x), \cdots, g_m(x)$ son funciones arbitrarias.
En estos casos, pueden hallarse soluciones particulares para cada ecuación diferencial:

$$L[y_{p_j}] = g_j(x); \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

Una vez hallada la correspondiente solución particular y_{p_j}, $j = 1, 2, \cdots, m$, puede demostrarse que la suma de todas ellas

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$$

constituye una solución particular de (4.20).
A este procedimiento se le conoce como principio de superposición.
A continuación presentamos algunas ED que requieren del principio de superposición.

1. $y'' + 4y = 2x^2 + 1 + e^x \cos x$.

   Aquí, $g_1(x) = 2x^2 + 1 \quad \& \quad g_2(x) = e^x \cos x$.

2. $y'' - 4y' + y = 3xe^{2x} + \operatorname{sen} x$.

   Aquí, $g_1(x) = 3xe^{2x} \quad \& \quad g_2(x) = \operatorname{sen} x$.

3. $y''' - 2y'' + 4y' = x^2 + x \operatorname{sen} x + (2x - 2) \cos x$.

   Aquí, $g_1(x) = x^2 \quad \& \quad g_2(x) = x \operatorname{sen} x + (2x - 2) \cos x$.

4. $y''' - y' = \operatorname{sen} x - 2 \cos 2x$.

   Ahora, el hecho de que las funciones trigonométricas tengan diferente argumento nos obliga a considerar por separado $g_1(x) = \operatorname{sen} x$ & $g_2(x) = -2 \cos 2x$.

Ejercicios 4.6.1 *Método de coeficientes indeterminados.* *Soluciones en la página 467*
Por el método de coeficientes indeterminados, encontrar una solución particular y escribir la solución general de cada ecuación diferencial.

1. $y'' - y' - 2y = -2x^3 + x^2 + 4x + 1$.

2. $y'' - y' - 2y = 16xe^{3x}$.

3. $y'' - 5y' + 6y = 10 \operatorname{sen} 2x - 50 \cos 2x$.

4. $y'' + 4y = (5x^2 + 4x - 3)e^x$.
5. $4y'' - 4y' + y = (-3x + 4)\operatorname{sen} x - 2(2x - 1)\cos x$.
6. $y'' + y' = 3$.
7. $y'' + 4y' + 4y = 2(x + 3)$.
8. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$.
9. $y'' + 25y = 6\operatorname{sen} x$.
10. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$.
11. $y'' - y = x^2 e^x$.
12. $y'' + 25y = 20\operatorname{sen} 5x + x\cos x$.
13. $y'' - y' = (3x^2 + 6x + 1)e^x$.
14. $y'' - 2y' - 8y = 2\operatorname{sen} x + (12x - 10)e^{4x}$.
15. $y'' - 4y' + 4y = (18x - 4)e^{2x}$.
16. $y'' + 12y' + 100y = 48\operatorname{sen} 10t$.
17. $y'' - 5y' + 6y = 2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x + (3 - 2x)e^{2x}$.

4.7 Variación de parámetros

4.7.1 Variación de parámetros para ED de orden 2

El método que presentamos en esta sección, llamado de variación de parámetros, es un procedimiento útil y más general que el de coeficientes indeterminados para la obtención de una solución particular $y_p(x)$ de la ED lineal no homogénea y se basa en el conocimiento de la solución general de la ED lineal homogénea asociada a la ED original.

Presentamos primeramente este método para las ED lineales de segundo orden. Diremos que el método de variación de parámetros se usa para obtener una solución particular $y_p(x)$ de la ED lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{4.21}$$

a partir del conocimiento de la solución general de la ED lineal homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.22}$$

Si suponemos que la solución general de la ED lineal homogénea (4.22) está dada por la combinación lineal

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x),$$

esto significa que $\phi_1(x)$ & $\phi_2(x)$ son soluciones de la ED (4.22) y además su wronskiano $W[\phi_1(x), \phi_2(x)] \neq 0$ en todo el intervalo (α, β) donde las funciones $p(x)$ & $q(x)$ son continuas. Es decir, $\phi_1(x)$ & $\phi_2(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ED (4.22).
Supongamos pues que $\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ sea la solución general de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
El método de variación de parámetros propone que la solución particular $y_p(x)$ tenga la misma forma que $\phi(x)$, pero permitiendo cambiar c_1 y c_2. Esto es, propone que $y_p(x)$ sea

$$y_p(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x),$$

donde u_1 & u_2 son funciones de x desconocidas.

2. El método de variación de parámetros en cambio es aplicable en principio para cualquier función $g(x)$ y, en este sentido, es mucho más general. Además se puede usar para ED lineales aun cuando no sean de coeficientes constantes. Lo único que se necesita es contar con un conjunto fundamental de soluciones $\{\phi_1, \phi_2\}$. Esta generalidad del método tiene un costo, puesto que para obtener una solución particular y_p es necesario calcular las integrales:
$$u_1 = \int -\frac{\phi_2(x)g(x)}{W(x)}\,dx \quad \& \quad u_2 = \int \frac{\phi_1(x)g(x)}{W(x)}\,dx.$$
(La resolución de estas integrales es dificultosa.)

Ejercicios 4.7.1 *Variación de parámetros para ED de orden 2.* *Soluciones en la página 467*
Utilizando variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial dada. Considerar que las funciones $y_1 = y_1(x)$ & $y_2 = y_2(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada.

1. $x^2y'' - 6xy' + 10y = -8x^3; \quad y_1 = x^2 \quad \& \quad y_2 = x^5$.
2. $x^2y'' - xy' - 3y = -30\sqrt{x}; \quad y_1 = x^3$ & $y_2 = \dfrac{1}{x}$.
3. $-x^2y'' + xy' + 8y = \dfrac{65}{\sqrt[3]{x}}; \quad y_1 = x^4$ & $y_2 = x^{-2}$.
4. $x^2y'' + 8xy' + 12y = \dfrac{6}{x^2}; \quad y_1 = x^{-3}$ & $y_2 = x^{-4}$.
5. $x^2y'' - 6xy' + 10y = 4x\ln x - 5x; \quad y_1 = x^5$ & $y_2 = x^2$.

Utilizando variación de parámetros, determinar una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial dada.

6. $y'' - y = e^x$.
7. $y'' - y = e^{-x}$.
8. $y'' + y = \operatorname{sen} x$.
9. $y'' + y = \cos x$.
10. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.
11. $y'' + 2y' + y = 12xe^{-x}$.
12. $y'' + y = \tan x$.
13. $y'' + 4y = 4\sec 2x$.
14. $y'' + 9y = 9\sec 3x\tan 3x$.
15. $y'' - y = e^{-2x}\operatorname{sen} e^{-x}$.
16. $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 2x$.
17. $y'' + 4y = \cos^2 2x$.
18. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
19. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.
20. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

4.7.2 Variación de parámetros para ED de orden n

Descripción del método general

Una vez discutido el método de variación de parámetros para ecuaciones diferenciales de orden 2, en esta sección extenderemos dicho método a ecuaciones diferenciales de orden n para $n > 2$. Así, consideraremos el caso de la ED lineal no homogénea normalizada:
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x); \tag{4.34}$$