3. Un termómetro se saca de una habitación–donde la temperatura del aire es de 70 °F–al exterior donde la temperatura es de 10 °F. Después de medio minuto el termómetro marca 50 °F. ¿Cuánto marca el termómetro cuando $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura marcada por el termómetro sea de 15 °F?

4. Una taza de café caliente, inicialmente a 95 °C, al estar en una habitación que tiene una temperatura constante de 21 °C, se enfría hasta 80 °C en 5 min. Determinar la temperatura del café después de 10 min. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el café tenga una temperatura de 50 °C?

5. Una barra metálica, cuya temperatura inicial es de 20 °C, se deja caer en un recipiente que contiene agua hirviendo (a 100 °C) y su temperatura aumenta 2 °C después de 1 s. Determinar la temperatura de la barra metálica después de 10 s. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura de la barra sea de 60 °C?

6. Un termómetro que indica 70 °F se coloca en un horno precalentado y mantenido a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio del horno, un observador registra que la temperatura marcada por el termómetro es de 110 °F después de medio minuto y de 145 °F después de 1 min. ¿A qué temperatura está el horno?

7. Un termómetro en el que se lee 80 °F se lleva al exterior. Cinco minutos más tarde el termómetro indica 60 °F. Después de otros 5 min el termómetro señala 50 °F. ¿Cuál es la temperatura del exterior?

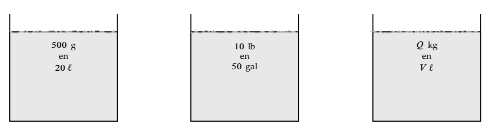
8. Un material cerámico se saca en cierto momento de un horno cuya temperatura es de 750 °C, para llevarlo a una segunda etapa de un proceso que requiere que el material se encuentre a una temperatura de cuando mucho 200 °C. Suponga que la temperatura de una sala de enfriamiento donde se colocará este cerámico es de 5 °C y que, después de 15 min, la temperatura del material es de 600 °C. ¿En cuánto tiempo el material cerámico estará listo para entrar a la segunda etapa de su proceso?

9. A las 13:00 horas un termómetro que indica 10 °F se retira de un congelador y se coloca en un cuarto cuya temperatura es de 66 °F. A las 13:05, el termómetro indica 25 °F. Más tarde, el termómetro se coloca nuevamente en el congelador. A las 13:30 el termómetro da una lectura de 32 °F. ¿Cuándo se regresó el termómetro al congelador?; ¿cuál era la lectura del termómetro en ese momento?

10. Luis invitó a Blanca a tomar café en la mañana. Él, sirvió dos tazas de café. Blanca le agregó crema suficiente como para bajar la temperatura de su café 1 °F. Después de 5 min, Luis agregó suficiente crema a su café como para disminuir su temperatura en 1 °F. Por fin, tanto Luis como Blanca empezaron a tomar su café. ¿Quién tenía el café más frío?

3.5 Mezclas

Si disolvemos 500 g de azúcar en 20 ℓ de agua, obtenemos una solución dulce con una concentración $C = \dfrac{500}{20}$ g/ℓ = 25 g/ℓ de azúcar (se lee 25 gramos por litro y significa 25 gramos de azúcar por cada litro de solución).
Cuando disolvemos 10 lb de sal en 50 gal de agua, obtenemos una solución salina o salmuera con una concentración $C = \dfrac{10}{50}$lb/gal = 0.2 lb/gal de sal (léase 0.2 libras por galón).
En general, si disolvemos Q kg (o cualquier unidad de masa) de un soluto en V ℓ (o alguna otra unidad de volumen) de un solvente, obtenemos una solución con una concentración $C = \dfrac{Q}{V}$ kg/ℓ del soluto (leído C kilogramos por litro y entendido como C kilogramos de soluto por cada litro de solución). Esto es



$C = 25$ g/ℓ $\qquad$ $C = 0.2$ lb/gal $\qquad$ $C = \frac{Q}{V}$ kg/ℓ

Ahora supongamos que inicialmente (en $t = 0$) tenemos en un tanque una cantidad V_0 de solución donde hay disuelta una cantidad Q_0 de un soluto. Supongamos también que, a partir de $t = 0$, se deja entrar otra solución al tanque con una rapidez R_e (flujo de entrada) y con una concentración C_e (concentración de entrada) del mismo soluto y que, al mismo tiempo, se deja salir del tanque la nueva solución (considerada uniforme por mezclado) con una rapidez R_s (flujo de salida) y una concentración C_s (concentración de salida) del mismo soluto.

Observamos lo siguiente:

1. Si $R_e = R_s$, entonces la cantidad V_0 de solución se mantiene constante al paso del tiempo t.

2. Si $R_e \neq R_s$, entonces la cantidad V de solución será función del tiempo t; es decir, $V = V(t)$. Aún más, si $R_e > R_s$, entonces $V(t) > V_0$ (además es creciente); mientras que si $R_e < R_s$, entonces $V(t) < V_0$ (además es decreciente).

3. En general, la cantidad Q de soluto en el tanque será función del tiempo t; es decir, $Q = Q(t)$.

4. Igualmente, la concentración C del soluto en el tanque será función del tiempo t; y variará según que $R_e = R_s$ o que $R_e \neq R_s$, esto es,
$$C(t) = \frac{Q(t)}{V_0} \quad \text{o bien} \quad C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

5. Un problema que es de interés en esta clase de procesos consiste en determinar la cantidad $Q(t)$ de soluto en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$.

Para resolver este problema procedemos como sigue:
Consideremos primero la rapidez con que cambia la cantidad de soluto $Q(t)$ en el tanque, la cual está dada por la rapidez con que entra el soluto menos la rapidez con la que sale. Esto es,
$$\frac{d}{dt}Q(t) = \big(\text{rapidez con que entra el soluto}\big) - \big(\text{rapidez con que sale el soluto}\big).$$

Si tomamos en cuenta que

la rapidez con que entra el soluto es R_eC_e;

la rapidez con que sale el soluto es $R_sC_s = R_sC(t)$.

El modelo de este proceso queda como el PVI:
$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_eC_e - R_sC(t), \quad \text{con} \quad Q(0) = Q_0.$$

El método de solución de este PVI dependerá de las condiciones del problema.

Ejemplo 3.5.1 *En un tanque que contiene* $1\,000$ ℓ *de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de* 20 ℓ*/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de* 0.01 *kg/*ℓ*, determinar:*

1. *La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante* $t \ge 0$.
2. *La cantidad de sal en el tanque después de* 30 *min.*
3. *La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.*
4. *El tiempo que debe transcurrir para que haya* 8 *kg de sal en el tanque.*

▼ Sea $Q(t)$ la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de t min. Como inicialmente se tienen 5 kg de sal, entonces $Q(0) = 5$.
La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \big(\text{rapidez con que entra la sal}\big) - \big(\text{rapidez con que sale la sal}\big)\,.$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?
Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20\ \ell/\text{min}$ y con una concentración $C_e = 0.01\ \text{kg}/\ell$, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_eC_e = (20\ \ell/\text{min})\,\big(0.01\ \text{kg}/\ell\big) = 0.2\ \text{kg/min}.$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?
La rapidez con que sale la solución del tanque es $R_s = 20\ \ell/\text{min}$. Sin embargo, la concentración de sal a la salida se debe hallar a partir de estas consideraciones:

- Ya que entra solución a razón de $20\ \ell/\text{min}$ y sale solución a la misma razón, es claro que el volumen V de solución en el tanque es constante: V = volumen inicial $= 1\,000\ \ell$.
- Después de t minutos hay $Q(t)$ kg de sal disueltos en $1\,000\ \ell$ de solución, por lo que la concentración de sal en la solución que sale es
$$C_s = \frac{Q(t)}{V} = \frac{Q(t)}{1\,000}\ \text{kg}/\ell.$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_sC_s = (20\ \ell/\text{min})\left[\frac{Q(t)}{1\,000}\ \text{kg}/\ell\right] = \frac{Q(t)}{50}\ \text{kg/min}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_eC_e - R_sC_s = 0.2 - \frac{Q(t)}{50} \;\Rightarrow\; Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0.2\,.$$

La cantidad de sal en el tanque $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) = 0.2, \quad \text{con} \quad Q(0) = 5.$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial:
$$Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) = 0.2;$$

la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante a $e^{\frac{1}{50}t}$, por lo que

$$e^{\frac{t}{50}}\left[Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t)\right] = 0.2e^{\frac{t}{50}} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{t}{50}}Q(t)\right] = 0.2e^{\frac{t}{50}} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{\frac{t}{50}}Q(t) = 0.2\int e^{\frac{t}{50}}\,dt = (0.2)(50)e^{\frac{t}{50}} + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t) = e^{-\frac{t}{50}}\left(10e^{\frac{t}{50}} + C\right) \;\Rightarrow\; Q(t) = 10 + Ce^{-\frac{t}{50}}.$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$Q(0) = 5 \;\Rightarrow\; Q(0) = 10 + Ce^{0} = 5 \;\Rightarrow\; 10 + C = 5 \;\Rightarrow\; C = -5,$$

encontramos que

$$Q(t) = 10 - 5e^{-\frac{t}{50}}$$

es la cantidad de sal (en kg) que hay en el tanque después de t minutos.

2. La cantidad de sal que hay después de 30 min:
$$Q(30) = 10 - 5e^{-\frac{30}{50}} = 10 - 5e^{-0.6} \approx 7.25594182 \;\Rightarrow\; Q(30) \approx 7.256\ \text{kg}.$$

3. La cantidad de sal que hay después de mucho tiempo la podemos denotar y calcular como sigue:
$$Q_{\text{lím}} = \lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty}\left(10 - 5e^{-\frac{t}{50}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(10 - \frac{5}{e^{\frac{t}{50}}}\right) = 10 \;\Rightarrow\; Q_{\text{lím}} = 10\ \text{kg}.$$

4. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque?
$$Q(t) = 8 \;\Rightarrow 10 - 5e^{-\frac{t}{50}} = 8 \;\Rightarrow\; e^{-\frac{t}{50}} = \frac{8-10}{-5} = \frac{-2}{-5} = 0.4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -\frac{t}{50} = \ln(0.4) \;\Rightarrow\; t = -50\ln(0.4) \approx 45.81453659\,\text{min}.$$

Es decir, $t \approx 45$ minutos, 49 segundos.

□

Ejemplo 3.5.2 *Un tanque que tiene capacidad para* $2\,000$ ℓ*, contiene inicialmente* $1\,000$ ℓ *de agua con* 8 *kg de sal disuelta. Se bombea salmuera al tanque a razón de* 20 ℓ*/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera a razón de* 15 ℓ*/min. Considerando que la concentración de la solución que entra es de* 0.01 *kg/*ℓ*, determinar:*

1. *La cantidad de sal que hay en el tanque después de* t *minutos.*
2. *La cantidad de sal que hay en el tanque después de* 1 *h.*
3. *La concentración de sal en el tanque cuando éste se llena.*

▼ Sea $Q(t)$ la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de t minutos.
Como inicialmente se tienen 8 kg de sal, entonces $Q(0) = 8$.
La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \big(\text{rapidez con que entra la sal}\big) - \big(\text{rapidez con que sale la sal}\big)\,.$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20\ \ell/\text{min}$ y con una concentración $C_e = 0.01\ \text{kg}/\ell$, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_eC_e = (20\ \ell/\text{min})\left(0.01\ \text{kg}/\ell\right) = 0.2\ \text{kg/min}.$$

La rapidez con que sale la solución del tanque es $R_s = 15\ \ell/\text{min}$.
Pero ¿con qué concentración de sal?
Ya que entra solución a razón de $20\ \ell/\text{min}$ y sale solución a razón de $15\ \ell/\text{min}$, entonces quedan en el tanque $5\ \ell$ de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos habrán quedado almacenados en el tanque $5t\ \ell$ de solución, los cuales se sumarán a los $1\,000\ \ell$ de solución iniciales. Es decir, después de t minutos habrá en el tanque $(1\,000 + 5t)\ \ell$ de solución en los que estarán disueltos $Q(t)$ kg de sal, por lo cual la concentración de sal en la solución que sale es

$$C_s = \frac{Q(t)}{1\,000 + 5t}\ \text{kg}/\ell.$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_sC_s = (15\ \ell/\text{min})\left[\frac{Q(t)}{1\,000+5t}\ \text{kg}/\ell\right] = \frac{15Q(t)}{1\,000+5t}\ \text{kg/min}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_eC_e - R_sC_s = 0.2 - \frac{15Q(t)}{1\,000+5t},$$

o sea

$$Q'(t) + \frac{15}{1\,000+5t}Q(t) = 0.2\,.$$

Luego, la cantidad $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{3}{200+t}Q(t) = 0.2, \quad \text{con} \quad Q(0) = 8.$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$Q'(t) + \frac{3}{200+t}Q(t) = 0.2,$$

la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante lo siguiente:

$$e^{\int \frac{3}{200+t}dt} = e^{3\int \frac{dt}{200+t}} = e^{3\ln(200+t)} = e^{\ln(200+t)^3} = (200+t)^3,$$

por lo que:

$$(200+t)^3\left[Q'(t) + \frac{3}{200+t}Q(t)\right] = 0.2(200+t)^3 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(200+t)^3Q(t)\right] = 0.2(200+t)^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (200+t)^3Q(t) = 0.2\int(200+t)^3dt = 0.2\frac{(200+t)^4}{4} + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t) = \frac{0.05(200+t)^4 + C}{(200+t)^3} = 0.05(200+t) + \frac{C}{(200+t)^3}.$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$Q(0) = 8 \Rightarrow Q(0) = 0.05(200) + \frac{C}{(200)^3} = 8 \Rightarrow 10 + \frac{C}{(200)^3} = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = (8-10)(200)^3 \Rightarrow C = -2(200)^3;$$

por lo que,

$$Q(t) = 0.05(200+t) - \frac{2(200)^3}{(200+t)^3} \Rightarrow Q(t) = 0.05(200+t) - 2\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$$

es la cantidad (en kg) de sal que hay en el tanque después de t minutos.

2. La cantidad de sal que hay en el tanque después de una hora (60 min) es

$$Q(60) = 0.05(200+60) - 2\left(\frac{200}{200+60}\right)^3 = 0.05(260) - 2\left(\frac{200}{260}\right)^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(60) = 13 - 0.91 = 12.09 \Rightarrow Q(60) = 12.09\ \text{kg}.$$

3. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando éste se llena?

Primero veamos que el tanque se llena cuando el volumen variable $V(t) = 1\,000 + 5t$ se iguala con la capacidad del tanque de $2\,000\ \ell$. Esto sucede cuando

$$V(t) = 2\,000 \Rightarrow 1\,000 + 5t = 2\,000 \Rightarrow 5t = 1\,000 \Rightarrow t = 200.$$

Es decir, el tanque se llena cuando han transcurrido $t = 200$ min.
La cantidad de sal que hay en el tanque en dicho instante es

$$Q(200) = 0.05(200+200) - 2\left(\frac{200}{200+200}\right)^3 = 0.05(400) - 2\left(\frac{200}{400}\right)^3 = 20 - 2\left(\frac{1}{8}\right) = 19.75 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(200) = 19.75\ \text{kg}.$$

Por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es

$$C(200) = \frac{Q(200)}{2\,000}\ \text{kg}/\ell = \frac{19.75}{2\,000}\ \text{kg}/\ell \Rightarrow C(200) = 0.009875\text{kg}/\ell \Rightarrow C(200) \approx 0.01\text{kg}/\ell.$$

□

Ejemplo 3.5.3 *En un tanque que contiene* 500 *gal de agua, inicialmente se disuelven* 10 *lb de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de* 4 *gal/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a razón de* 5 *gal/min. Considerando que la solución que entra tiene sal con una concentración de* 0.1 *lb/gal, determinar:*

1. *La cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.*
2. *La cantidad de sal en el tanque después de media hora.*
3. *La concentración de sal en el tanque cuando quedan* 100 *gal de solución.*

▼ Sea $Q(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque después de t minutos.
Como inicialmente se tienen 10 lb de sal, entonces $Q(0) = 10$.
La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \left(\text{rapidez con que entra la sal}\right) - \left(\text{rapidez con que sale la sal}\right).$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?
Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 4\ \text{gal/min}$ y con una concentración $C_e = 0.1\ \text{lb/gal}$, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_eC_e = \left(4\ \text{gal/min}\right)\left(0.1\ \text{lb/gal}\right) = 0.4\ \text{lb/min}.$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que la solución sale del tanque es $R_s = 5$ gal/min. Pero ¿con qué concentración de sal? Ya que la salmuera entra a razón de 4 gal/min y la solución mezclada sale a razón de 5 gal/min, entonces el tanque pierde 1 gal de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos se habrán perdido t galones de solución de los 500 gal iniciales. Es decir, después de t minutos quedarán en el tanque $(500 - t)$ gal de solución, en los que estarán disueltas $Q(t)$ lb de sal, por lo que la concentración de sal en la solución que sale será

$$C_s = \frac{Q(t)}{500 - t} \text{ lb/gal.}$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_s C_s = \big(5 \text{ gal/min}\big)\left[\frac{Q(t)}{500 - t} \text{ lb/gal}\right] = \frac{5Q(t)}{500 - t} \text{ lb/min.}$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C_s = 0.4 - \frac{5Q(t)}{500 - t};$$

o sea

$$Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) = 0.4\,.$$

Luego, la cantidad $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) = 0.4, \quad \text{con} \quad Q(0) = 10.$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) = 0.4\,.$$

Ésta es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante lo siguiente:

$$e^{\int \frac{5}{500-t}dt} = e^{5\int \frac{dt}{500-t}} = e^{-5\ln(500-t)} = e^{\ln(500-t)^{-5}} = (500 - t)^{-5};$$

por lo cual:

$$(500 - t)^{-5}\left[Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t)\right] = 0.4(500 - t)^{-5} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(500 - t)^{-5}Q(t)\right] = 0.4(500 - t)^{-5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (500 - t)^{-5}Q(t) = 0.4\int (500 - t)^{-5}dt = -0.4\frac{(500 - t)^{-4}}{-4} + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t) = (500 - t)^5\left[0.1(500 - t)^{-4} + C\right] = 0.1(500 - t) + C(500 - t)^5.$$

Ahora bien, considerando la condición inicial:

$$Q(0) = 10 \Rightarrow Q(0) = 0.1(500) + C(500)^5 = 10 \Rightarrow 50 + C(500)^5 = 10 \Rightarrow C = \frac{10 - 50}{(500)^5} \Rightarrow C = \frac{-40}{(500)^5};$$

por lo que,

$$Q(t) = 0.1(500 - t) + \frac{-40}{(500)^5}(500 - t)^5 \Rightarrow Q(t) = 0.1(500 - t) - 40\left(\frac{500 - t}{500}\right)^5$$

es la cantidad (en lb) de sal que hay en el tanque después de t minutos.

2. La cantidad de sal que hay en el tanque después de media hora (30 min) es

$$Q(30) = 0.1(500 - 30) - 40\left(\frac{500 - 30}{500}\right)^5 = 0.1(470) - 40\left(\frac{470}{500}\right)^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(30) = 47 - 29.3562 = 17.6438 \Rightarrow Q(30) = 17.6438 \text{ lb.}$$

3. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 gal de solución?

Después de t minutos hay en el tanque $(500 - t)$ galones de solución y éstos serán 100 gal cuando: $500 - t = 100 \Rightarrow t = 400$. Es decir, en el tanque hay 100 gal de solución cuando han transcurrido $t = 400$ min.

La cantidad de sal en dicho instante es

$$Q(400) = 0.1(500 - 400) - 40\left(\frac{500 - 400}{500}\right)^5 = 0.1(100) - 40\left(\frac{100}{500}\right)^5 = 10 - 0.0128 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(400) = 9.9872 \text{ lb;}$$

por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es

$$C(400) = \frac{Q(400)}{100} \text{ lb/gal} = \frac{9.9872}{100} \text{ lb/gal} \Rightarrow C(400) = 0.099872 \text{ lb/gal} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C(400) \approx 0.1 \text{ lb/gal.}$$

□

Ejemplo 3.5.4 *Un estanque contiene* $100\ m^3$ *de agua contaminada. Con el propósito de descontaminarlo se introduce agua limpia a razón de* $2\ m^3$*/min y el agua contaminada (uniformemente mezclada) se deja salir del estanque a la misma razón.*

1. *¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de* 1 *h?*
2. *¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un* 90%*?*

▼ Sea Q_0 la cantidad inicial (en $t = 0$) de contaminantes en el estanque y sea $Q(t)$ la cantidad de contaminantes después de t minutos.
La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de contaminantes en el estanque, en el minuto $t \geq 0$ es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \big(\text{rapidez con que entran los contaminantes}\big) - \big(\text{rapidez con que salen contaminantes}\big)\,.$$

Como entra agua limpia al estanque, entonces nada entra de contaminante.
Como entra y sale agua del estanque a la misma razón ($2\ m^3$/min), entonces la cantidad de agua en el estanque es siempre la misma ($100\ m^3$), por lo cual la concentración de contaminantes en cada m^3 de agua que sale del estanque es $\dfrac{Q(t)}{100}$.
Luego,

$$\frac{d}{dt}Q(t) = 2(0) - 2\frac{Q(t)}{100} \Rightarrow Q'(t) = -\frac{Q(t)}{50}.$$

Por lo tanto, la cantidad $Q(t)$ de contaminantes en el estanque, después de t minutos, está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) = 0, \quad \text{con} \quad Q(0) = Q_0.$$

Se observa que se trata de una ED lineal homogénea, que podemos resolver separando variables.

1. ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de una hora?

$$Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) = 0 \Rightarrow Q'(t) = -\frac{1}{50}Q(t) \Rightarrow \frac{Q'(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{50} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{Q'(t)}{Q(t)}dt = -\frac{1}{50}\int dt \Rightarrow \ln Q(t) = -\frac{1}{50}t + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t) = e^{-\frac{1}{50}t + C} = e^{-\frac{t}{50}}e^C = e^{-\frac{t}{50}}C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t) = Ce^{-\frac{t}{50}};$$

que es la solución general de la ED. Ahora bien,

$$Q(0) = Q_0 \Rightarrow Ce^0 = Q_0 \Rightarrow C = Q_0.$$

Por lo que,

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{50}}.$$

Entonces, la cantidad de contaminantes después de 60 min (1 h), en el estanque, es

$$Q(60) = Q_0 e^{-\frac{60}{50}} = Q_0 e^{-1.2}.$$

Así, la cantidad de contaminantes que se han eliminado del estanque en 60 min, es

$$Q_0 - Q(60) = Q_0 - Q_0 e^{-1.2} = Q_0(1 - e^{-1.2}).$$

¿Y qué porcentaje es esta cantidad de Q_0?

$$\frac{Q_0 - Q(60)}{Q_0}(100) = \frac{\cancel{Q_0}(1 - e^{-1.2})}{\cancel{Q_0}}(100) = (1 - e^{-1.2})100 = 69.88\,.$$

Por lo tanto, después de 1 h se habrá eliminado 69.88% de los contaminantes del estanque.

2. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90%?
Si después de $t = t_1$ minutos los contaminantes han disminuido en un 90%, entonces:

$$Q(t_1) = 10\% \text{ de } Q_0 = (0.1)Q_0.$$

Luego,

$$Q(t_1) = (0.1)Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-\frac{t_1}{50}} = (0.1)Q_0 \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{50}} = 0.1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{t_1}{50} = \ln(0.1) \Rightarrow t_1 = -50\ln(0.1) \approx 115.13 \text{ (min)}.$$

Por lo tanto, para que los contaminantes en el estanque hayan disminuido en un 90% deben transcurrir aproximadamente 115 minutos, 8 segundos.

□

Ejercicios 3.5.1 ***Mezclas.*** *Soluciones en la página 464*

1. Un tanque contiene 100 ℓ de agua salada en el cual hay 2 kg de sal disueltos. Agua salada con 0.25 kg de sal por litro entra al tanque a razón de 16 ℓ/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.
   a. Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.
   b. Determinar la cantidad de sal después de 10 min.
   c. Determinar la concentración de sal después de media hora.
   d. ¿Cuánta sal hay después de un tiempo largo?
2. Un tanque contiene 50 gal de agua pura. Una solución de agua salada con 1 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.
   a. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minutos?
   b. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de 0.5 lb de sal por galón?
   c. ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?

3. Un tanque contiene 100 gal de agua salada con 10 lb de sal disuelta. Agua salada con 1.5 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 4 gal/min.
   a. Obtener la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$.
   b. Determinar la cantidad de sal en el tanque después de 10 min.
   c. Calcular la concentración de sal en el tanque después de 20 min.
   d. Determinar la concentración de sal en el tanque, cuando hay solamente 10 gal de solución.
4. Un tanque con capacidad para 500 gal contiene inicialmente 10 lb de sal disueltas en 200 gal de agua. Se bombea al tanque salmuera que contiene 2 lb/gal a razón de 4 gal/min y se permite que la mezcla salga del tanque a razón de 3 gal/min.
   a. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque después de t minutos?
   b. ¿Cuál es la concentración de sal después de una hora?
   c. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?
   d. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando se llena?
5. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. A razón de 2 gal/min entra al tanque salmuera que contiene 1 lb de sal por galón y la solución uniformemente mezclada sale del tanque a razón de 3 gal/min.
   a. Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.
   b. Calcular la concentración de sal en el tanque después de media hora.
   c. Determinar la concentración de sal en el tanque cuando hay solamente 10 gal de solución.
   d. ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?
6. Un depósito contiene 100 gal de salmuera en la que hay disueltas 40 lb de sal. Se desea reducir la concentración de sal hasta 0.1 lb/gal vertiendo agua pura en el depósito a razón de 5 gal/min y permitiendo que salga a la misma razón. La mezcla se mantiene uniforme.
   ¿Cuánto tiempo pasará hasta que se logre lo deseado?
7. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 gal de agua en los cuales hay 10 lb de sal disuelta. Una salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de 4 gal/min. Calcular el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 min.
8. Se bombea cerveza con un contenido de 8% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 500 galones de cerveza con 6% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior a razón de 5 gal/min en tanto que el líquido mezclado se extrae del tanque a razón de 6 gal/min.
   a. ¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de t minutos?
   b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de 1 h?
9. Un tanque de 100 gal contiene inicialmente agua pura. Una solución de colorante al 30% fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min y la mezcla resultante sale a la misma tasa. Después de 15 min el proceso se detiene y se hace fluir agua pura al tanque a una tasa de 5 gal/min y la mezcla sale a la misma tasa. Encuentre la cantidad de colorante en el tanque después de 30 min.
10. Un tanque de 100 gal se llena inicialmente con 40% de solución colorante. Una solución colorante al 20% fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 100 gal que se había llenado inicialmente con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a una tasa de 5 gal/min. Obtener una expresión para la cantidad de colorante en el segundo tanque. ¿Cuál es la concentración de colorante en el segundo tanque después de 30 min?